ANÁLISIS MATEMÁTICO II — UTN-FRBA

PRIMER CUATRIMESTRE — 1°RECUPERATORIO PRIMER PARCIAL

(14/7/2025)

Apellido y nombre: Curso: Z2162

T1	T2	P1	P2	P3	P4	Calificación

EJERCICIOS TEÓRICOS

T1) a) Definir diferenciabilidad de una función escalar de dos variables en un punto.

b) Analizar la existencia de plano tangente a la gráfica de f(x,y) en el$(0,0,z_0)$, siendo

$$f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{x^3y^2}{x^2+y^2} & \text{si } (x,y)\neq(0,0)\\ 2 & \text{si}(x,y)=(0,0)\end{cases}$$

T2) Determinar si las siguientes afirmaciones son verdaderas o falsas; **justifique** claramente su respuesta.

a) La ecuación del plano tangente a la superficie de ecuación $z=f(x,y)+x^2$ en el punto en (1,2,4) es $z=2x+2$ sabiendo que, f es una función de clase C^2en$\mathbb{R}^2$ y admite un valor máximo local 3 en el punto (1,2).

b) Si $F(x,y,z)=\varphi\left(\dfrac{z}{xy}\right)$, $\phi\in C^1$, $x\,y\neq 0$, se demuestra que $x.F'_x+y.F'_y+2.z.F'_z=4$.

EJERCICIOS PRÁCTICOS

P1) Dadas las familias de curvas de ecuaciones: $y=k.x^4$; $\varphi(x)+by^2=c$ hallar el valor del parámetro "b" de modo que ambas familias resulten ortogonales, sabiendo que $\varphi(x)$ es la curva solución de la EDO $y''-y'=2-2x$ que pasa por el origen, con $y'(0)=0$.

P2) Dada la superficie S de ecuación $1-x^2-3xz+y^2-\ln z=2$ hallar, si es posible, los puntos donde el plano tangente a S en el punto (0; 1; z_0), corta a la curva C definida por las ecuaciones: $y=x^2$; $z=1-3x$.

P3) Halle las direcciones de derivada direccional nula en el punto P= (4,2) de la función g(x,y) = x.f(x,y), donde z = f(x,y) es la función definida implícitamente por $xy+ze^{z-1}=9$ en un entorno del punto (4,2,1).

P4) Determinar si es posible los extremos locales y absolutos de $f(x,y)=(x-y)^4+(y-1)^2$; clasificarlos.

(resuelto por Sylvina)

AM2	1° parcial Cardeias - Pavón	HOJA N° 1/3 FECHA 14-7-25

$\boxed{T1}$ a) Definir diferenciabilidad de una función escalar de dos variables en un punto

$f: D \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ $\quad \bar{X} \in D, \quad \hat{X} = (x_0, y_0) \quad \hat{h} = (h_1, h_2)$

si $\lim\limits_{\bar{h} \to \bar{0}} \dfrac{f(\bar{x}+\bar{h}) - f(\bar{x}) - f'_x(\bar{x})(x-x_0) - f'_y(\bar{x})(y-y_0)}{\sqrt{h_1^2+h_2^2}} = 0$

b) Analizar la existencia de plano tangente a la gráfica de $f(x,y)$ en $(0,0,z_0)$ siendo:

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^3y^2}{x^2+y^2} & \text{si } (x,y) \neq (0,0) \\ 2 & \text{si } (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

Analizo si f es diferenciable en $(0,0)$. Para eso analizo la continuidad de f en $(0,0)$ pues si no es continua no es diferenciable

- $f(0,0) = 2$
- $¿\exists \lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)$? $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{\overset{\to 0}{x^3} \overset{\text{acot}}{y^2}}{x^2+y^2} = 0$ pues es acotado por infinitésimo

$$0 \leq \frac{y^2}{x^2+y^2} \leq \frac{y^2}{y^2} = 1 \to \frac{y^2}{x^2+y^2} \text{ está acotado entre } 0 \text{ y } 1$$

- $¿\underbrace{\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)}_{0} = f(0,0)$? $\quad 0 \overset{?}{=} 2$ NO $\Rightarrow$ f NO es continua en $(0,0)$

$\therefore$ $\boxed{\text{f NO es diferenciable en } (0,0)}$

NOTA

(resuelto por Sylvina)

12) Determinar V o F:

a) La ec. del plano tangente a la sup. de ec. $z = f(x,y) + x^2$ en el punto $(1,2,4)$ es $z = 2x+2$ sabiendo que $f \in C^1$ en $\mathbb{R}^2$ y admite un valor máximo local 3 en el punto $(1,2)$

Plano tang en $(1,2,4) \longrightarrow z = f(x,y) + x^2$

$4 = f(1,2) + 1^2 \rightarrow \boxed{f(1,2) = 3}$

$f(1,2) = 3 \Rightarrow (1,2) \in C_3$

es máximo $\Rightarrow \nabla f(1,2) = (0,0) \rightarrow \boxed{f'_x(1,2) = 0 = f'_y(1,2)}$

Sup.: $z = f(x,y) + x^2 \longrightarrow f(x,y) + x^2 - z = 0 \longrightarrow N_{PT} = (f'_x + 2x, f'_y, -1)$

$N_{PT} \text{ en } (1,2,4) = (\overset{0}{f'_x(1,2)} + 2\cdot 1, \overset{0}{f'_y(1,2)}, -1) = (2,0,-1) = N_{PT}$

Plano tg: $(2,0,-1)(x,y,z) = (2,0,-1)(1,2,4)$

$2x - z = -2 \rightarrow \boxed{z = 2x+2}$ $\boxed{V}$

b) Si $F(x,y,z) = \varphi\left(\frac{z}{xy}\right)$, $\phi \in C^1$, $xy \neq 0$ se demuestra que

$x F'_x + y F'_y + 2z F'_z = 4$

$F'_x = \varphi'\left(\frac{z}{xy}\right) \frac{(-z)}{x^2 y}$ $\qquad \varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

$F'_y = \varphi'\left(\frac{z}{xy}\right) \frac{(-z)}{x y^2}$

$F'_z = \varphi'\left(\frac{z}{xy}\right) \cdot \frac{1}{xy}$

$\Rightarrow x F'_x + y F'_y + 2z F'_z = \cancel{x}\, \varphi'\left(\frac{z}{xy}\right) \frac{(-z)}{x^{\cancel{2}} y} + \cancel{y} \cdot \varphi'\left(\frac{z}{xy}\right) \frac{(-z)}{x y^{\cancel{2}}} + 2z\, \varphi'\left(\frac{z}{xy}\right) \frac{1}{xy} =$

$= \frac{-z}{xy} \varphi'\left(\frac{z}{xy}\right) - \frac{z}{xy} \varphi'\left(\frac{z}{xy}\right) + \frac{2z}{xy} \varphi'\left(\frac{z}{xy}\right) = 0 \neq 4$

F

NOTA

(resuelto por Sylvina)

AM2	1° parcial	HOJA N° 2/3
	Candelas - Pavón	FECHA 14-7-25

P1 Dadas las familias de curvas de ec. $y = k x^4$; $\varphi(x) + by^2 = c$ hallar el valor del parámetro "b" de modo que ambas familias resulten ortogonales, sabiendo que $\varphi(x)$ es la curva solución de la EDO $y'' - y' = 2 - 2x$ que pasa por el origen, con $y'(0) = 0$

$y = k x^4 \perp \varphi(x) + by^2 = c$ si la curva ortogonal a $y = k x^4$ es $\parallel \varphi(x) + by^2 = c$

Hallo $\varphi(x)$

$y'' - y' = 2 - 2x$ Cambio de variable: $y' = w \Rightarrow w' = y''$

$w' - w = 2 - 2x$

SH $w' - w = 0 \rightarrow \frac{dw}{dx} = w \rightarrow \frac{1}{w} dw = dx$

integro m.a.m: $\ln(w) = x + c$ $c \in \mathbb{R}$

$\underbrace{e^{\ln(w)} = e^x . e^c}$

$\boxed{w = A e^x}$ $A = e^c$

SP $w_p = Bx + C \rightarrow w'_p = B$

$w' - w = 2 - 2x$

$B - Bx - C = 2 - 2x$

$x(-B) + (B - C) = -2x + 2 \rightarrow -B = -2 \rightarrow B = 2$

$B - C = 2 \rightarrow C = 0$

$\boxed{w = 2x}$

$w_G = A e^x + 2x = y'$

$y'(0) = A e^0 + 2 \times 0 = A = 0 \rightarrow A = 0 \Rightarrow y' = 2x \rightarrow \boxed{y = x^2 + c}$

(1) $\varphi(x) = x^2 + c_1$

$y = k x^4 \rightarrow k = \frac{y}{x^4}$

$y' = k 4x^3 = \frac{y}{x^4} . 4x^3 \rightarrow y' = \frac{4y}{x} \rightarrow y'_\perp = -\frac{x}{4y} = \frac{dy}{dx}$

$-x\,dx = 4y\,dy$

(1) $x^2 + c_1 + by^2 = c$ integro mam

$-x^2 + c = 2y^2$

$\underbrace{x^2 + 2y^2 = c}$ paralela a $\boxed{x^2 + 2y^2 = c}$ ortogonal a $y = kx^4$

$c_1 = 0$ $\boxed{b = 2}$

NOTA

(resuelto por Sylvina)

(P2) Dada la sup. S de ec. $1-x^2-3xz+y^2-\ln(z)=z$
Hallar, si es posible, los puntos donde el plano tangente a S en el punto $(0,1,z_0)$ corta a la curva C definida por las ecuaciones
$y=x^2$; $z=1-3x$

$(0,1,z_0)\in S \rightarrow 1-0^2-3\times 0\cdot z_0+1^2-\ln(z_0)=2$

$\boxed{z_0=1}$

$\boxed{P=(0,1,1)}$

Hallo N_S con TFI

$F(x,y,z)=1-x^2-3xz+y^2-\ln(z)-z \Rightarrow$ S es la sup. de nivel 0 de F

$N_{S_P} // \nabla F_P$

$$\begin{cases} F'_x = -2x-3z \longrightarrow F'_x(0,1,1) = -3 \\ F'_y = 2y \longrightarrow F'_y(0,1,1) = 2 \\ F'_z = -3x-\frac{1}{z} \longrightarrow F'_z(0,1,1) = -1 \end{cases}$$

$\boxed{\nabla F_{(0,1,1)}=(-3,2,-1)}$

$N_{PT_P} // N_{S_P} // \nabla F_{(P)} \rightarrow N_{PT}=(-3,2,-1)$

$(-3,2,-1)(x,y,z)=\underbrace{(-3,2,-1)}_{N}\underbrace{(0,1,1)}_{P}$

$\boxed{-3x+2y-z=1}$ Plano tangente a S en P

$C:\begin{cases} y=x^2 \\ z=1-3x \end{cases} \xrightarrow{x=t} \boxed{C: \bar{\gamma}(t)=(\underbrace{t}_{x},\underbrace{t^2}_{y},\underbrace{1-3t}_{z})}$

Hallo $C\cap PT_P$: Q:

$-3x+2y-z=1$

$-3t+2t^2-(1-3t)=1$

$\cancel{-3t}+2t^2-1\cancel{+3t}=1 \rightarrow 2t^2=2$

$t^2=1 \begin{cases} t=1 \\ t=-1 \end{cases}$

$Q_1=\bar{\gamma}(1)=(1,1,-2)$
$Q_2=\bar{\gamma}(-1)=(-1,1,4)$

$$\boxed{\begin{array}{l} Q_1=(1,1,-2) \\ Q_2=(-1,1,4) \end{array}}$$

NOTA

(resuelto por Sylvina)

P3) Hallar las direcciones de derivada direccional nula en el punto $P=(4,2)$ de la función $g(x,y)=x\cdot f(x,y)$ donde $z=f(x,y)$ es la función definida implícitamente por $xy+z\,e^{z-1}=9$ en un entorno del punto $(4,2,1)$

$z=f(x,y)$, $F(x,y,z)=xy+z\,e^{z-1}-9$ $Q=(4,2,1)$, $P=(4,2)$ $\Big\}\ f(4,2)=1$

x T.F.I

$F'_x=y \longrightarrow F'_x(4,2,1)=2$

$F'_y=x \longrightarrow F'_y(4,2,1)=4$

$F'_z=e^{z-1}+z\,e^{z-1} \longrightarrow F'_z(4,2,1)=2$

$f'_x(4,2)=-\frac{2}{2}=-1$

$f'_y(4,2)=-\frac{4}{2}=-2$

$g(x,y)=x\cdot f(x,y)$, g es diferenciable $\Rightarrow g'((x_0,y_0),\breve{u})=\nabla g(x_0,y_0)\cdot\breve{u}$

Hallo $\overline{\nabla} g(x,y)$

$$\begin{cases} g'_x=f(x,y)+x\,f'_x(x,y) \longrightarrow g'_x(4,2)=\underbrace{f(4,2)}_{1}+4\cdot\underbrace{f'_x(4,2)}_{-1} \\ g'_y=x\,f'_y(x,y) \end{cases}$$

$\boxed{g'_x(4,2)=-3}$

$g'_y(4,2)=4\underbrace{f'_y(4,2)}_{-2}=\boxed{-8=g'_y(4,2)}$

$\overline{\nabla} g(4,2)=(-3,-8)$

direcciones de derivada direccional nula $\rightarrow \underbrace{\breve{u}_1 \text{ y } \breve{u}_2}\perp \overline{\nabla} g(4,2)$

$$\boxed{\begin{aligned}\vec{u}_1&=(8,-3)\\ \vec{u}_2&=(-8,3)\end{aligned}}$$

NOTA

(resuelto por Sylvina)

P4) Determinar, si es posible, los extremos locales y absolutos de $f(x,y) = (x-y)^4 + (y-1)^2$. Clasificarlos

f es diferenciable $\Rightarrow$ hallo PC $\to (x,y) \,/\, \nabla f_{(x,y)} = (0,0)$

$$\begin{cases} f'_x = 4(x-y)^3 = 0 \longrightarrow x-y=0 \longrightarrow \boxed{x=y} \\ f'_y = -4(x-y)^3 + 2(y-1) = 0 \end{cases}$$

$x-y=0 \Rightarrow 2(y-1)=0 \to y=1 \xrightarrow{x=y} x=1 \to PC = (1,1)$

Criterio del hessiano

$$f''_{xx} = 12(x-y)^2$$
$$f''_{xy} = -12(x-y)^2 \longrightarrow H(x,y) = \begin{pmatrix} 12(x-y)^2 & -12(x-y)^2 \\ -12(x-y)^2 & 12(x-y)^2+2 \end{pmatrix}$$
$$f''_{yy} = 12(x-y)^2 + 2$$

$$H_{(1,1)} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \to |H_{(1,1)}| = 0 \to$$ el criterio no decide

$$f_{(1,1)} = 0$$

$$f(x,y) = \underbrace{(x-y)^4}_{\geq 0} + \underbrace{(y-1)^2}_{\geq 0} \Rightarrow f(x,y) \geq 0 \;\; \forall (x,y) \in \mathbb{R}^2$$

$\therefore$ f alcanza mínimo local y absoluto en $(1,1)$ y toma valor 0

(resuelto por Sylvina)